

Parameterbestimmung für Weibull-Verteilung

In der klassischen Betrachtung ergeben sich die Weibull-Parameter durch Berechnung der Ausgleichsgerade im linearisierten Weibull-Wahrscheinlichkeitsdiagramm /1/.

Die Punkte für die Ausgleichsgerade bestimmen sich durch Umstellen der 2-parametrischen Weibull-Funktion nach t :

$$\underbrace{\ln\left(\ln\left(\frac{1}{1-H}\right)\right)}_Y = \underbrace{b \ln(t)}_X - \underbrace{b \ln(T)}_a$$

Substituiert man die Terme durch Y , X und a , so erhält man eine Ausgleichsgerade mit:

$$Y = b X + a$$

b ist also gleichzeitig die Steigung der Ausgleichsgerade, als auch der Formparameter im Weibull Netz. Die Bestimmung von b und a erfolgt in der Regel durch die bekannte Methode der kleinsten Fehlerquadrate und den obigen Werten X und Y . T berechnet sich dann aus dem Schnittpunkt der Ausgleichsgerade durch die Y -Achse, mit:

$$a = -b \cdot \ln(T)$$

und aufgelöst nach

$$T = e^{-\frac{a}{b}}$$

In der Literatur wird häufig empfohlen, die lineare Regression über X und Y anstelle von Y und X durchzuführen. Die Berechnung der Häufigkeiten ist weniger fehlerbehaftet, als die Angaben der Laufzeiten. Deshalb macht es Sinn die Fehlerquadrate in X - und nicht in Y -Richtung zu minimieren (Least-Square-Methode). Der Ansatz lautet dann:

$$Y = \frac{1}{b} X + \frac{1}{b} \ln(T)$$

Die Unterschiede sind in der Praxis in bezug auf b jedoch vernachlässigbar.

Ein anderes Verfahren zur Bestimmung von b und T ist die Berechnungsmethode von **Gumbel** /4/, bei der die Punkte im Weibull-Netz anders gewichtet werden:

$$b = \frac{0.577}{s_{\log}}$$

$$T = 10^{\left(\frac{\sum_{i=1}^n \log(t_i)}{n} + 0,2507/b \right)}$$

mit
 s_{\log} = logarithmische Standardabweichung

Bei dieser Bestimmung ergeben sich gegenüber der Standardmethode größere Werte für b , was bei der Interpretation der Ergebnisse zu beachten ist.

Eine weitere Methode zur Bestimmung von b und T ist die **Maximum-Likelihood-Abschätzung** (MLE) /5/. Für die Weibull-Analyse ergibt sich folgende Beziehung:

$$\frac{\sum_{i=1}^n t_i^b \ln(t_i)}{\sum_{i=1}^n t_i^b} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(t_i) - \frac{1}{b} = 0$$

Für den Fall, dass nicht alle Prüflinge ausfallen, z.B. weil manche vorher entnommen wurden, bezieht sich der mittlere Term nur auf die Ausfälle:

$$\frac{\sum_{i=1}^n t_i^b \ln(t_i)}{\sum_{i=1}^n t_i^b} - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \ln(t_i) - \frac{1}{b} = 0$$

n : Gesamtzahl der Prüflinge
 r : Anzahl Ausfälle

Zur Ermittlung von b müssen beide Formeln iterativ gelöst werden. Ist b bestimmt worden, kann T direkt berechnet werden:

$$T = \left(\left(\sum_{i=1}^n t_i^b \right) \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{b}} \quad \text{und für } r < n \quad T = \left(\frac{1}{r} \left(\sum_{i=1}^n t_i^b \right) \right)^{\frac{1}{b}}$$

Die MLE Methode liefert besonders bei kleinen Stichproben eine zu hohe Steigung (siehe Vergleich in Tabelle weiter unten). Hirose /32/ bietet deshalb eine erwartungstreue Korrektur für die b :

$$b_{MLEu} = \frac{b}{1,0115 + 1,278/r + 2,001/r^2 + 20,35/r^3 + 46,98/r^4}$$

b_{MLEu} steht für unbiased MLE und r ist die Anzahl Fehler.

Für unvollständige Daten mit nicht ausgefallenen Teilen gibt es von Ross /33/ die

Korrektur:

$$b_{MLEu} = \frac{b}{1 + \frac{1,37}{r - 1,92} \sqrt{\frac{n}{r}}}$$

n : Gesamtanzahl Prüflinge
 r : Anzahl Ausfälle

Empfehlung: Für diese Korrektur sollten min. 10 Prüflinge vorhanden sein. Die Steigung wird hier stark ins Flache verschoben.

Eine weitere wichtige Methode ist die sogenannte **Momentmethode** und im speziellen die vertikale Momentmethode. In der entsprechenden Herleitung von Weibull, veröffentlicht in /11/, ergeben sich die Parameter T und b durch:

$$b = \frac{\ln(2)}{\ln(\bar{V}_1) - \ln(\bar{V}_2)} \quad T = \frac{\bar{V}_1}{(1/b)}$$

mit

$$\bar{V}_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} t_m + \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n t_i \right)$$

$$\bar{V}_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(n+1)^2} t_m + \frac{4}{n+1} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{4}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^n (i t_i) \right)$$

$$t_m = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})$$

Dieses Verfahren hat den Vorteil, dass es sich mit relativ geringem Rechenaufwand und Rechenzeit begnügt und nicht wie das Maximum-Likelihood-Methode iterativ gelöst werden muß.

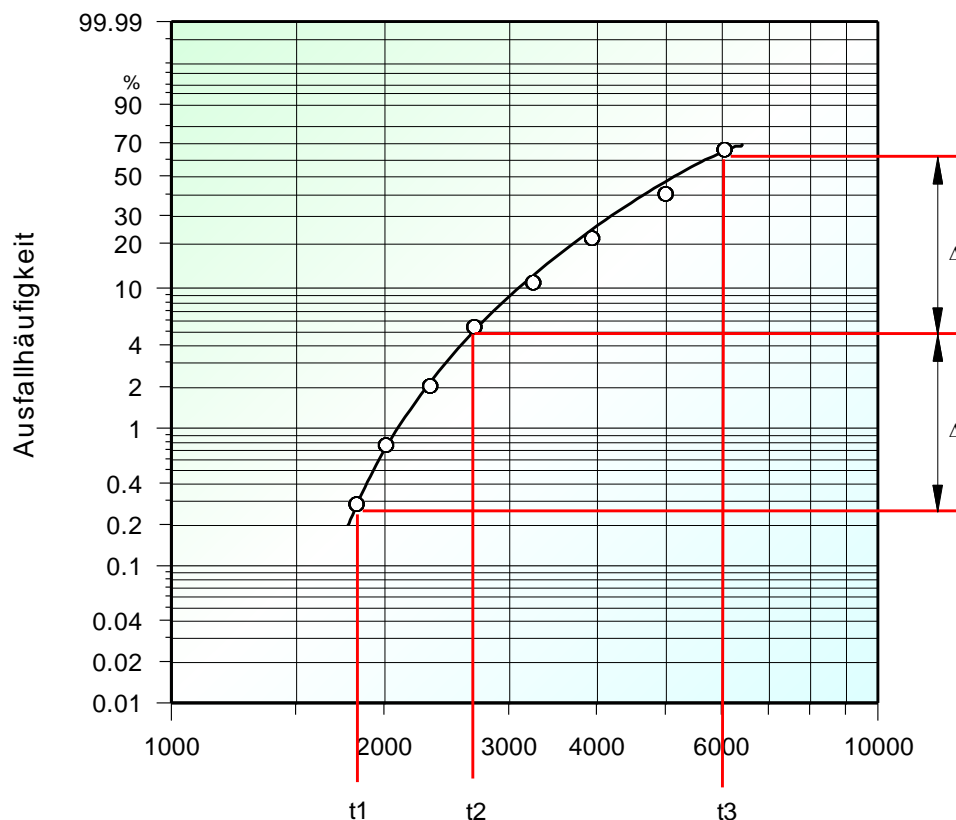
Für die Werte 1000, 2000, 3000, 4000 und 5000 sollen beispielhaft die entsprechenden Parameter verglichen werden:

Verfahren	b	T
Least-Square ΔY^2	1,62	3524
Least-Square ΔX^2	1,64	3514
MLE Maximum-Likelihood	2,29	3394
MLE unbiased	1,60	3394
Gumbel	2,09	3434
Momentenmethode (vertikal)	1,87	3281

Die Maximum-Likelihood-Methode ergibt hier die größte Steigung, während die Methode der Ausgleichsgerade am flachsten ist. In den folgenden Analysemethoden werden Überlegungen auf Basis der Ausgleichsgeraden durchgeführt, die als Standard anzusehen ist.

Bestimmung der ausfallfreien Zeit t_o

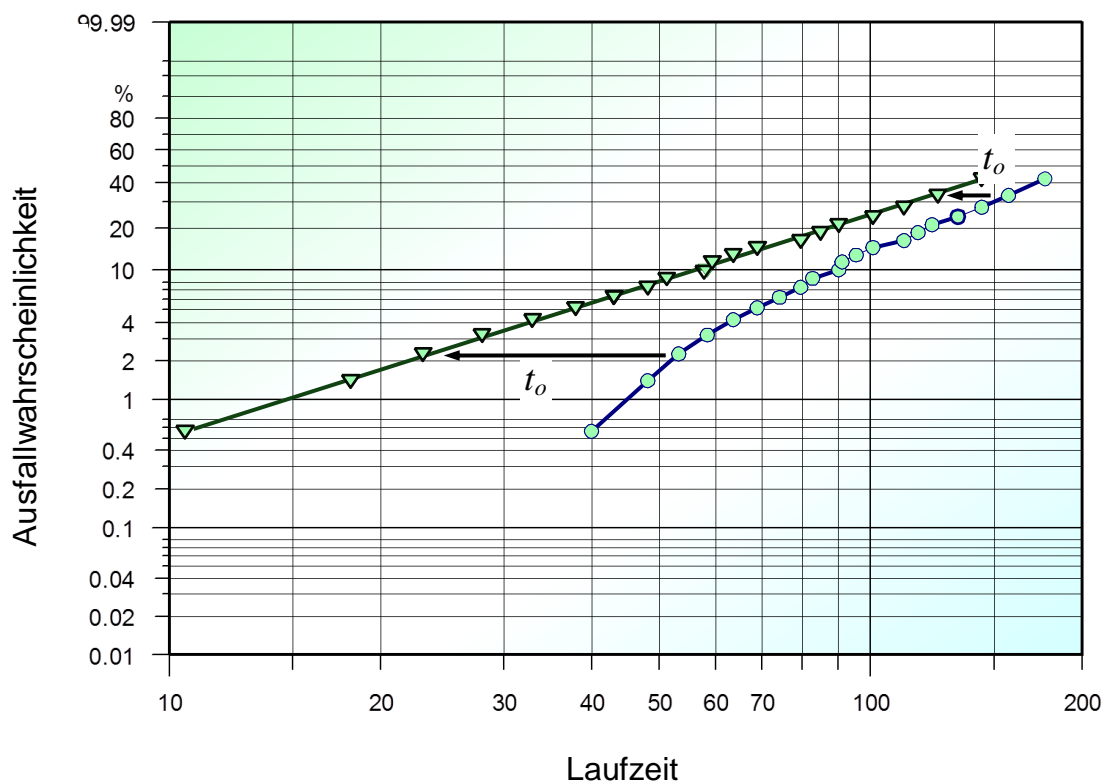
Benötigt ein Bauteil erst einmal eine bestimmte Laufzeit, bis ein „Verschleiß“ auftritt, so hat es eine ausfallfreie Zeit (z.B. weil erst eine Schutzschicht verbraucht sein muss, bevor der eigentliche Reibbelag zum Tragen kommt). Als Grund für t_o wird oft auch die Zeit zwischen Produktion und tatsächlichem Einsatzgebrauch genannt. Dies soll hier jedoch getrennt behandelt werden und nicht als t_o im eigentlichem Sinne zu verstehen sein. Zur Bestimmung von t_o gibt es verschiedene Methoden /1/, darunter auch eine grafische Näherungslösung nach Dubey /13/.



Dabei wird die Kurve in senkrechter Richtung in zwei gleichgroße Abschnitte Δ geteilt und die Lotlinien zur X-Achse bilden t_1 , t_2 und t_3 . t_o berechnet sich dann durch:

$$t_o = t_2 - \frac{(t_3 - t_2)(t_2 - t_1)}{(t_3 - t_2) - (t_2 - t_1)}$$

Eine mathematisch eindeutige Formel gibt es jedoch nicht. Grundsätzlich kann man bei der ausfallfreien Zeit t_o sagen, dass sie zwischen 0 und dem Wert des ersten ausgefallenen Teiles liegen muß. In der Regel liegt t_o auch sehr nahe kurz vor dem Wert des ersten Ausfalles. Es bietet sich folgendes Verfahren an: Man lässt t_o in kleinen Schritten das Intervall zwischen $t > 0$ und dem ersten Ausfall t_{min} durchlaufen und berechnet bei jedem Schritt den Korrelationskoeffizienten der Ausgleichsgerade. Je besser der Wert des Korrelationskoeffizienten ist, desto genauer liegen die Punkte im Weibull-Netz auf einer Geraden. t_o ist dann der Wert, bei dem dieser am höchsten ist und sich somit die Ausgleichsgerade am besten approximieren lässt. Grafisch bedeutet dies nichts anderes, als dass die Punkte im Weibull-Netz nach links verschoben um den Betrag t_o aufgetragen werden, siehe folgendes Bild:



Die Punkte ergeben dann eine bessere Linearität. Dies liegt daran, weil durch die logarithmische X-Achse der vordere Bereich länger gestreckt ist, als der hintere. Hierdurch wird die Rechtskrümmung der Punkte aufgehoben. Die einzelnen Schritte sind nochmal wie folgt:

1. Bestimmung des Korrelationskoeffizienten r nach Bravais-Pearson für Ausgangszustand $t_o=0$

$$r_o = \frac{\sum((x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}))}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \sum(y_i - \bar{y})^2}}$$

2. Festlegung einer Schrittweite für die erste Verschiebung um t_o

$$\Delta t_o = t_1 / 10$$

3. Alle Punkte verschieben und neuen Korrelationskoeffizienten r bestimmen

$$x_i = \ln(t_i - \Delta t_o) \quad r = \frac{\sum((x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}))}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \sum(y_i - \bar{y})^2}}$$

4. Prüfen, ob Korrelationskoeffizienten besser oder schlechter geworden ist

$r > r_o \Rightarrow$ Wert vergrößern

$r < r_o \Rightarrow$ Vorzeichen umgekehren und Wert verkleinern, weiter mit Punkt 3

5. Nach festgelegter Anzahl Durchläufe Abbruch $\Leftrightarrow t_o$

Man kann natürlich statistisch den Korrelationskoeffizient der Ausgleichsgeraden mit t_o mit den einschlägigen Methoden testen /2/, ob die ausfallfreie Zeit signifikant vorhanden ist oder nicht. Aufgrund der Vielzahl an Ursachen für den gekrümmten Kurvenverlauf lohnt sich in der Praxis ein statistisch exakter Hypothesentest meist nicht. Man sollte aber bei der eben beschriebenen Methode überprüfen, ob der Korrelationskoeffizient der Ausgleichsgerade mit t_o bei $r \geq 0,95$ liegt.

Anwendung in Visual-XSel® 12.0

www.crgraph.de/XSel12Inst.exe

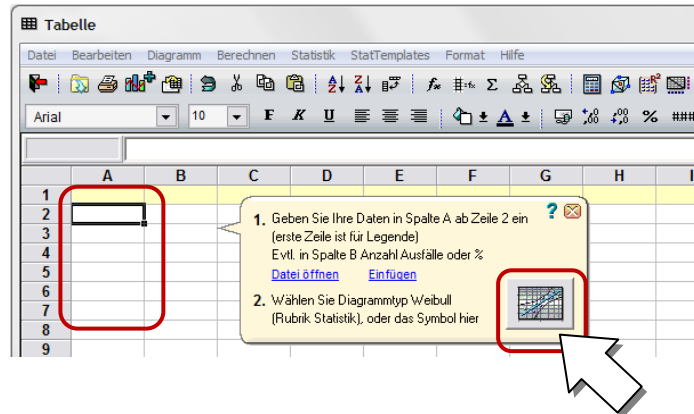
The image shows the Visual-XSel 12.0 software interface. The main window displays a menu of statistical and reliability analysis methods. A red box highlights the 'Weibull und Zuverlässigkeitsmethoden' (Weibull and Reliability Methods) option, with a white arrow pointing to it. Below this, a 'Weibull - Leitfaden' (Weibull - Guide) dialog box is open, providing a step-by-step configuration process. The dialog box is divided into several sections:

- Auswahl (Selection):**
 - Weibull-Netz Daten (Weibull-Net Data):**
 - Vollständige Daten (Alle Teile ausgefallen)
 - Mit Durchläufer (deren Laufzeiten >= le)
 - Mit nicht schadhafte(n) Teil(e)n (Unvollständige Laufstrecken)
 - Anwärter Prognose * (Unvollständige Laufstrecken)
 - Sudden Death Testing * (Tests in Gruppen mit je 1 Ausfall)
 - Weibull-Vorgabe (Weibull Specification):**
 - Direkte Vorgabe (über Punkte oder Steigung)
 - Monte-Carlo * (Punkte generieren aus Vorgabe)
 - Leeres Weibull-Netz
 - Methoden (Methods):**
 - Test auf Weibull-Verteilung *
 - Vergleich von zwei Verteilungen *
 - Mischverteilung *
 - Weibull-Wöhler *
 - Weitere Darstellungen und Methoden... * (Tests, Dichtefkt., Lognormal, Schichtlinien usw.)
 - Lebensdauerversuche (Lifetime Tests):**
 - Mindestzuverlässigkeit bestimmen
 - Prüfumfang bestimmen
 - Testdauer bestimmen
 - Weibayes (Auffälle und/oder Durchläufer mit Vorg. b)
 - Systemzuverlässigkeit (System Reliability):**
 - Fehlerbaumanalyse FTA
 - Reliability Blockdiagramm
 - Weibull-Formeln (Weibull Formulas):**
 - Formelsammlung (Berechnung / Taschenrechner)
- Dateneingabe (Data Input):**
 - Dateneingabe über Tabelle
 - Daten aus Zwischenablage
 - Daten aus Datei
- Ausfälle (Failures):**
 - Häufigkeiten aus Anzahl Werte
 - Einzelhäufigkeiten absolut
 - Einzelhäufigkeiten in %
 - Summenhäufigkeiten in %
- Buttons:**
 - Weiter... (Next)
 - Abbruch (Cancel)
 - Hilfe (Help)

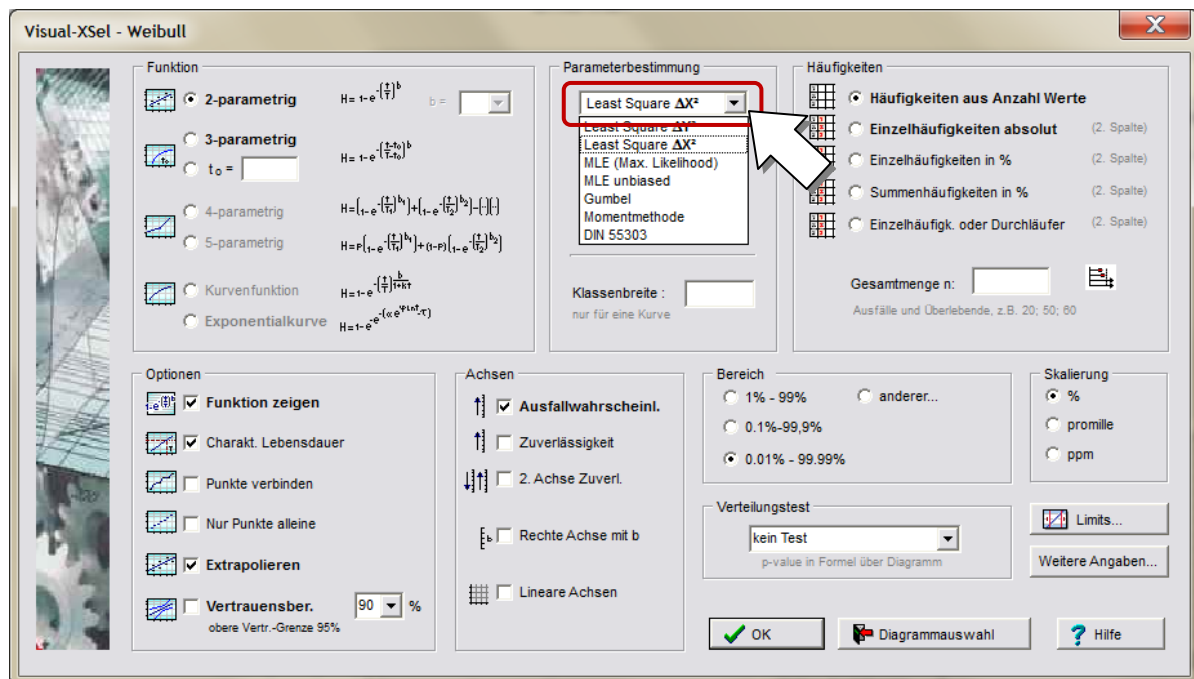
* Methode über Vorlagendatei

Eingabe der Daten in Spalte A ab Zeile 2

Danach Ikone Weibull klicken.



Die Parameterbestimmung kann in der Mitte oben ausgewählt werden. Es stehen alle gebräuchlichen Methoden zur Verfügung.



Obwohl die Standardeinstellung Least-Square ΔY^2 ist, empfiehlt sich die Varianten Least-Square ΔX^2 . Näheres hierzu in der Beschreibung am Anfang.

Direkte Erstellung eines Weibull-Diagramms

Das Weibull-Diagramm (Weibull-Netz) kann auch direkt als Diagrammtyp von der Tabelle aus dargestellt werden. Man erreicht die Tabelle über die Ikone im Hauptfenster (je nach Option unter Ansicht kann die Tabelle auch bereits rechts unter unterhalb des Hauptfensters offen



sein). Die Eingabe der Daten erfolgt ab Zeile 2. Die erste Zeile ist reserviert für die Legende, auch dann wenn hier aktuell kein Titel steht. Danach ist die Spalte A zu markieren und die Ikone Diagramm ② und der Diagrammtyp Weibull zu wählen ③.

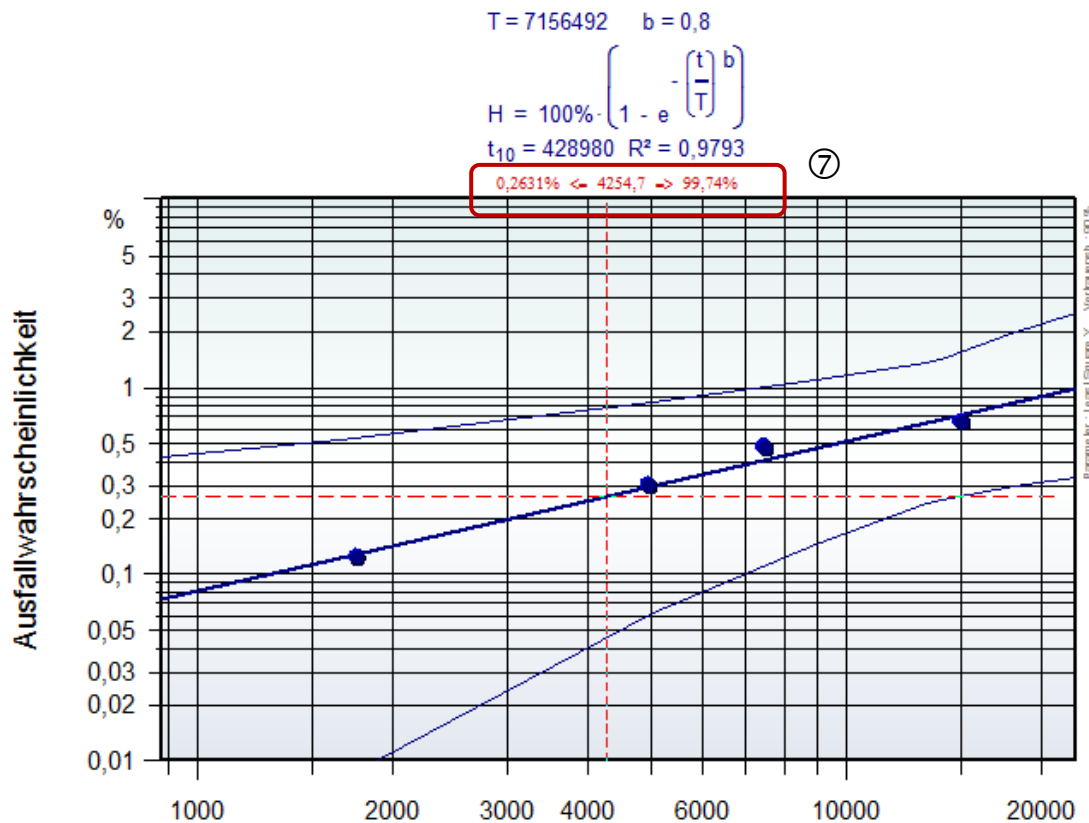
The image shows a composite screenshot of the software interface for creating a Weibull diagram. It includes the following elements:

- Tabelle (Table):** A spreadsheet window showing data in column A:

	A	B	C	D
1				
2	7485			
3	15038			
4	4958			
5	1756			
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
- Visual-XSel - Diagrammtypen - Diagramm 1:** A dialog box showing various chart types. The 'Weibull' option is selected and highlighted with a red box and arrow labeled 3.
- Visual-XSel - Weibull:** A configuration dialog box with several sections:
 - Funktion:** Radio buttons for '2-parametrig', '3-parametrig', '4-parametrig', '5-parametrig', 'Kurvenfunktion', and 'Exponentialkurve'. The '2-parametrig' option is selected.
 - Parameterbestimmung:** A dropdown menu set to 'Least Square ΔY^* '.
 - Häufigkeiten:** Radio buttons for 'Häufigkeiten aus Anzahl Werte', 'Einzelhäufigkeiten absolut', 'Einzelhäufigkeiten in %', 'Summenhäufigkeiten in %', and 'Einzelhäufigk. oder Durchläufer'. The 'Häufigkeiten aus Anzahl Werte' option is selected.
 - Gesamtmenge n:** A text field containing the value '567', highlighted with a red box and arrow labeled 4.
 - Bereich:** Radio buttons for '1% - 99%', '0.1% - 99.9%', '0.01% - 99.99%', and 'anderer...'. The 'anderer...' option is selected and highlighted with a red box and arrow labeled 5.
 - Optionen:** Checkboxes for 'Funktion zeigen', 'Charakt. Lebensdauer', 'Punkte verbinden', 'Nur Punkte alleine', 'Extrapolieren', and 'Vertrauensber.'. The 'Vertrauensber.' checkbox is checked, and its dropdown menu is set to '90%', highlighted with a red box and arrow labeled 6.
 - Achsen:** Checkboxes for 'Ausfallwahrscheinl.', 'Zuverlässigkeit', '2. Achse Zuverl.', 'Rechte Achse mit b', and 'Lineare Achsen'.
 - Verteilungstest:** A dropdown menu set to 'kein Test'.

Für den Fall, dass es Durchläufer ④ ohne Ausfall gibt, kann dies unter der Gesamtmenge angegeben werden (als Beispiel hier 567, bedeutet inkl. Ausfälle). Bei der Angabe in diesem Feld wird erwartet, dass die Durchläufer mindestens die Strecke des letzten Ausfalles erlebt haben. Da die Durchläufer die Weibull-Gerade weit

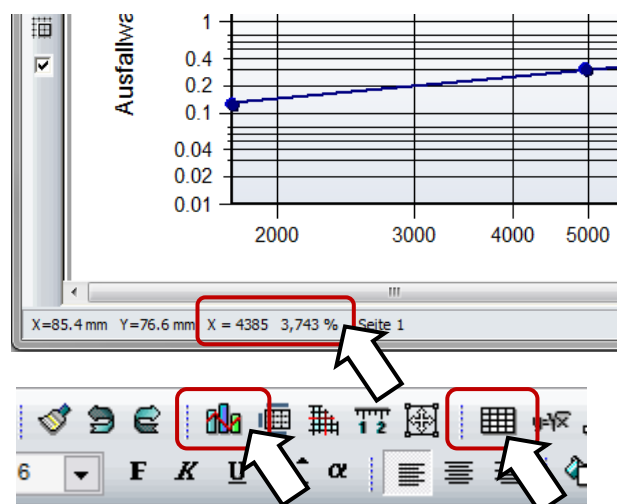
nach unten verschiebt, sollte der Achsenbereich der Wahrscheinlichkeit hier auf ca. 10% reduziert werden ⑤. Weiterhin wird oft der Vertrauensbereich dargestellt ⑥. Ist die Option „Funktion zeigen“ gewählt, so ist über dem Weibull Diagramm die Funktion der gewählten Weibull-Funktion zu sehen. Hierüber können die Parameter der Verteilung abgelesen werden. Weiterhin gibt es die Angabe von t_{10} (B_{10}), also die Laufzeit, nachdem 10% der Teile ausgefallen sind. Mit Hilfe des Bestimmtheitsmaßes R^2 lässt sich abschätzen, wie gut die Ausfallpunkte auf der gewählten Funktion liegen. Normalerweise erwartet man hier mindestens $R^2=0,95$. Wenn dieser Wert schlechter ist, sollte man eine andere Funktion auswählen, z.B. die 3-parametrische Weibull-Funktion (siehe Fallbeispiele am Ende).



Führt man mit der Maus in das Diagramm, erscheint ein rotes Fadenkreuz ⑦. Dieses ist allerdings nur zu sehen, wenn kein Element vorher angeklickt wurde. In der Mitte (roter Text rechts oben über dem Diagramm) wird die Laufstrecke angezeigt, links davon die Ausfallwahrscheinlichkeit und rechts die Überlebenswahrscheinlichkeit.

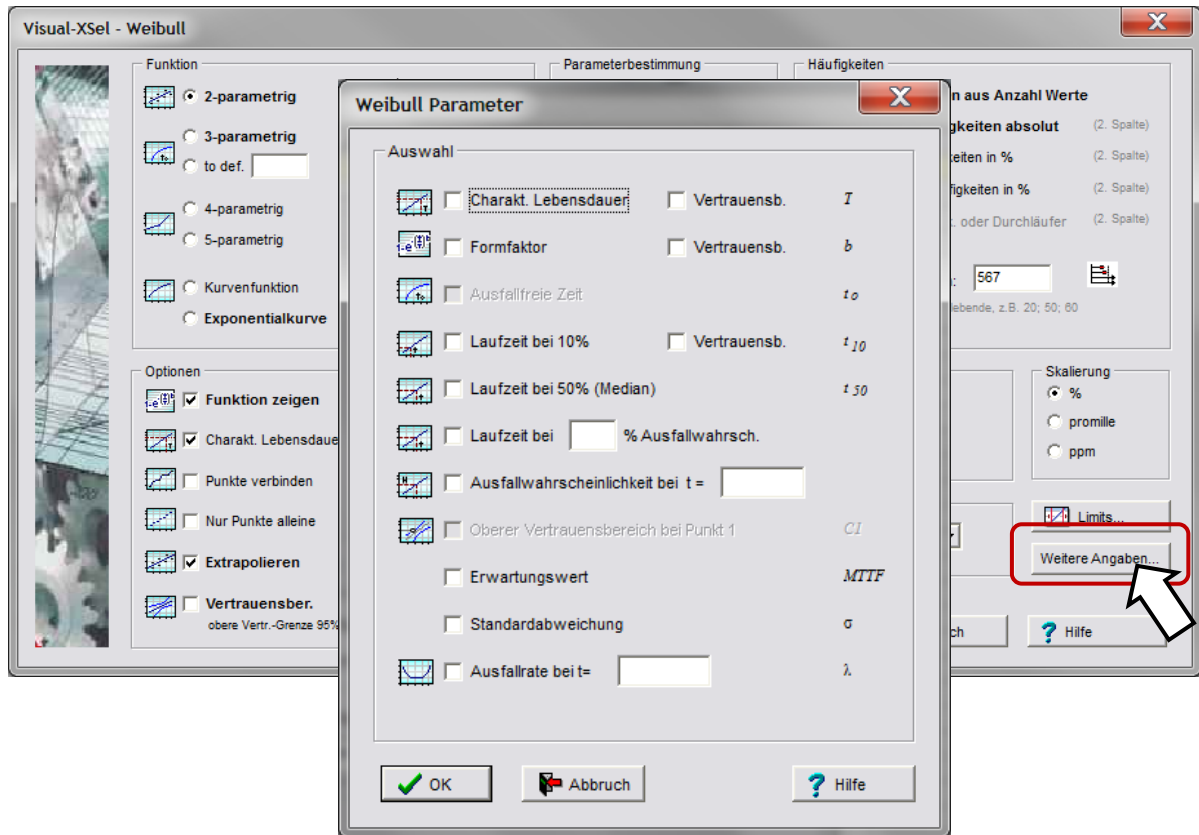
Die Mausspitze kann auf einen beliebigen Punkt im Diagramm zeigen. Dabei wird in der Statuszeile unten links angezeigt, bei welchen Einheiten sich diese befindet.

Um eine andere Auswahl der Weibull-Parameter zu treffen, kann man vom Hauptfenster aus wieder die Ikone Diagrammtyp wählen. Zurück in die Dateneingabe kommt man durch die Ikone der



Tabelle

Neben den Optionen von Weibull-Parametern, gibt es noch eine Reihe weiterer Angaben, die man rechts neben dem Weibull-Diagramm ausgeben kann.



Literatur:

- /1/ VDA Qualitätskontrolle in der Automobilindustrie
Zuverlässigkeitssicherung bei Automobilherstellern und Lieferanten
Verfahren und Beispiele
Verband der Automobilindustrie (VDA) 2000, 2. und 3. Auflage

- /2/ Angewandte Statistik
L. Sachs
Springer-Verlag 1983
ISBN 3-540-12800-X

- /4/ Das Lebensdauernetz
Deutsche Gesellschaft für Qualität e.V. Ffm
Beuth Verlag GmbH 1975
ISBN 3 410 32721 5

- /5/ Formelsammlung zu den statistischen Methoden des Qualitätsmanagements
Graebig, Klaus
DGQ-Band 11-05
ISBN 3-410-32877-7

- /12/ Handbuch zur Berechnung der Zuverlässigkeit für Ingenieure
Koslow, Uschakow
Carl Hanser Verlag München Wien 1979
ISBN 3-446-12546-9

- /13/ One Some Permissible Estimators of the Location Parameter of the Weibull
and Certain Other Distributions
Dubey S. D.
Technometrics Vol. 9, No. 2, May 1967, p. 293-307

- /15/ DGQ-Band 17-26
Das Lebensdauernetz – Leitfaden zur grafischen Bestimmung von Zuver-
lässigkeitskenngrößen der Weibull-Verteilung
Frankfurt am Main und Berlin 1995
ISBN 3-410-32835-1

- /32/ Hirose, H. "Bias Correction for the Maximum Likelihood Estimation in Two-parameter
Weibull Distribution," IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation, Vol.
6, No.1, February 1999

- /33/ Ross, R. "Bias and Standard Deviation Due to Weibull Parameter Estimation for
Small Data Sets," IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation, Vol. 3,
No.1, February 1996.